

Лекция 29. Ударное действие нагрузки

1. Коэффициент динамичности и взаимодействие тел при ударе.
2. Расчет приведенных масс.

1

Взаимодействие тел, при котором за малый промежуток времени значительно (скачкообразно) изменяются скорости этих тел, называется ударом [5: с.47]. В задачах на ударную нагрузку различают ударяющее тело и объект удара, который представляет собой упругую систему, неизменяемую относительно земли; заданы начальные условия движения ударяющего тела и требуется определить максимальные перемещения, деформации и напряжения в объекте удара.

В некоторых задачах анализа удара можно установить *коэффициент динамичности*, который показывает, во сколько раз максимальные напряжения и деформации при ударе больше соответствующих напряжений и деформаций при статическом приложении нагрузки. Если указывать индексом “д” параметр НДС при ударе, а индексом “ст” тот же параметр при статическом действии нагрузки, то для коэффициента динамичности имеем:

$$k_d = \frac{\sigma_d}{\sigma_{ст}} = \frac{\epsilon_d}{\epsilon_{ст}}. \quad (29.1)$$

Следует, впрочем, заметить, что не всегда существуют статические аналогии ударным нагрузкам.

Рассмотрим задачу расчета конструкции на ударную нагрузку в рамках следующей модели взаимодействия тел [38].

Точечная масса M , двигаясь по вертикальной оси Oz , падает на конструкцию, находящуюся в равновесии, и соударяется с ней при скорости v_1 в точке с координатой z_1 . После соударения ударяющее тело продолжает движение по оси Oz , находясь в соприкосновении с объектом удара до момента остановки (гипотеза «слипания масс»). Состояние конструкции задается обобщенной координатой точки соударения z , причем:

1. Суммарная потенциальная энергия деформации объекта удара определяется выражением:

$$U_d = \frac{c}{2}(z - z_0)^2. \quad (29.2)$$

2. Кинетическая энергия T_k конструкции определяется *приведенной массой объекта удара по кинетической энергии, или первой приведенной массой m_T* :

$$T_k = \frac{m_T \dot{z}^2}{2}. \quad (29.3)$$

3. Импульс p и потенциальная энергия $U_{\text{кт}}$ объекта удара в поле тяготения определяются *приведенной массой по импульсу, или второй приведенной массой m_p* :

$$p = m_p \dot{z}; \quad U_{\text{кт}} = -m_p g z. \quad (29.4)$$

Возможность описания данной моделью реального удара определяется, в первую очередь, существованием для конструкции трех параметров c , m_T , m_p , задающих характеристики энергии и импульса объекта удара согласно приведенным формулам. Это требование обеспечивается, если выполняется следующее *свойство пропорциональности перемещений точек конструкции: любая точка конструкции перемещается параллельно и пропорционально перемещению точки соударения и одновременно с ней*. Действительно, при этом условии деформации и напряжения в упругой конструкции будут пропорциональны перемещениям точки соударения, а поскольку удельная потенциальная энергия деформации есть квадратичная функция напряжений (см. формулу (17.12)), то суммарная энергия деформации конструкции есть квадратичная функция перемещения точки соударения, то есть функция вида (29.2). Далее на отдельных примерах расчета приведенных масс показано, что допущениям 2 и 3 расчетной модели также можно удовлетворить при указанном свойстве конструкции. Заметим, что это свойство предполагает отсутствие в конструкции волновых процессов.

Предложенной расчетной модели взаимодействия тел при ударе соответствует следующая механическая модель: ударную нагрузку воспринимает платформа конечной массы, установленная на пружине жесткости c , причем точка z_0 соответствует ненагруженной пружине (Рис.29.1). Масса платформы при расчете кинетической энергии берется равной m_T , при расчете импульса и потенциальной энергии полагается равной m_p ; масса пружины полагается равной нулю. Эта модель объясняет смысл термина «приведенная масса»: масса всей конструкции «приводится» к точке соударения (платформе). Коэффициент c будем далее называть *коэффициентом жесткости конструкции при ударе*.

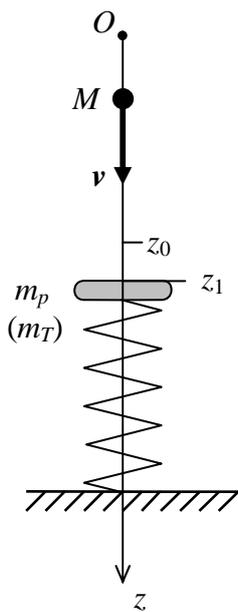


Рис.29.1

Из предложенной механической модели следует, в частности, что в отсутствии сил тяжести просадка конструкции под действием статической нагрузки P определяется условием

$$c(z - z_0) = P; \quad (29.5)$$

просадка конструкции вследствие собственного веса определяется условием

$$c(z_1 - z_0) = m_p g; \quad (29.6)$$

просадка конструкции, вызванная статическим действием груза массы M , определяется условием

$$c \Delta z_{\text{ст}} = Mg. \quad (29.7)$$

Здесь $\Delta z_{\text{ст}} = z_{\text{ст}} - z_1$ ($z_{\text{ст}}$ — координата точки действия гру-

за).

Формулы (29.5) — (29.7) могут быть получены строго из принципа минимума полной потенциальной энергии рассматриваемой системы. Читателю рекомендуется проверить справедливость этих формул, не прибегая к аналогии груза на пружине.

Определим максимальное перемещение точки соударения в направлении удара, полагая, что этому соответствуют опасные напряжения при ударе. Заметим, впрочем, что опасные напряжения могут возникнуть как раз при обратном ходе конструкции, пусть даже с меньшим перемещением.

Скорость v'_1 совместного движения груза и конструкции в момент после удара определяется из закона сохранения импульса:

$$v'_1 = \frac{M}{M + m_p} v_1. \quad (29.8)$$

Можно убедиться, что изменению скорости движения груза и конструкции согласно выражению (29.8) соответствует скачкообразное уменьшение кинетической энергии системы, что объясняется тепловыделением при ударе. Подчеркнем, что соотношение (29.8) получено из допущения о слипании масс и хорошо соответствует практике.

Обозначим U_1 и U_2 — потенциальную энергию системы, соответственно, в момент удара и в момент остановки после удара. Закон сохранения энергии представим в виде:

$$U_2 - U_1 = \frac{(M + m_T)v_1'^2}{2}. \quad (29.9)$$

Обозначим перемещение системы до остановки $\Delta z_d = z_2 - z_1$. Определим изменение потенциальной энергии деформации вследствие этого перемещения, для чего удобно считать $z_0 = 0$. Получим:

$$\begin{aligned} \Delta U_d &= \frac{c}{2} z_2^2 - \frac{c}{2} z_1^2 = \frac{c}{2} (z_2 - z_1)(z_2 + z_1) = \frac{c}{2} (z_2 - z_1)(z_2 - z_1 + 2z_1) = \\ &= \frac{c}{2} \Delta z_d (\Delta z_d + 2z_1) = \frac{c}{2} \Delta z_d^2 + \Delta z_d c z_1 = \frac{c}{2} \Delta z_d^2 + \Delta z_d m_p g. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия системы в поле тяжести также меняется. Изменение этой энергии при перемещении на Δz_d составит

$$\Delta U_T = -(M + m_p) g \Delta z_d.$$

Поскольку $U_2 - U_1 = \Delta U_d + \Delta U_T$, равенство (29.9) представляется в виде:

$$\frac{c}{2} \Delta z_d^2 + \Delta z_d m_p g - (M + m_p) g \Delta z_d = \frac{(M + m_T)v_1'^2}{2}.$$

Этим определяется уравнение для перемещения конструкции при ударе Δz_d :

$$\Delta z_{\text{д}}^2 - \frac{2Mg}{c} \Delta z_{\text{д}} - \frac{(M + m_T)v_1'^2}{c} = 0, \quad (29.10)$$

которое имеет решение:

$$\Delta z_{\text{д}} = \frac{Mg}{c} + \sqrt{\left(\frac{Mg}{c}\right)^2 + \frac{M + m_T}{c} \frac{M^2}{(M + m_p)^2} v_1'^2}. \quad (29.11)$$

Заметим, что второе решение уравнения (29.10) даст отрицательное значение перемещения, что соответствует обратному ходу конструкции и здесь не рассматривается.

Полученное решение удобно представить как связь перемещения при ударе и просадки при статической нагрузке:

$$\Delta z_{\text{д}} = \Delta z_{\text{ст}} + \sqrt{\Delta z_{\text{ст}}^2 + \Delta z_{\text{ст}} \frac{(M + m_T)M}{(M + m_p)^2} \frac{v_1'^2}{g}}. \quad (29.12)$$

Последнее выражение позволяет определить коэффициент динамичности для последующего расчета напряжений и деформаций. Коэффициент динамичности в рассматриваемой задаче вводят как отношение

$$k_{\text{д}} = \frac{\Delta z_{\text{д}}}{\Delta z_{\text{ст}}}. \quad (29.13)$$

Данный коэффициент позволяет определять напряжения при ударе применением формулы:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}}, \quad (29.14)$$

где $\sigma_{\text{ст}}$ — составляющая напряжения, вызванная статической нагрузкой без учета собственного веса конструкции. Действительно, будем считать, что при расчете напряжений действие динамической и статической нагрузок эквивалентно, то есть перемещение $\Delta z_{\text{д}}$ можно считать результатом некоторой статической нагрузки в точке удара. Тогда в формуле (29.13) присутствуют составляющие перемещений только вследствие нагрузки в этой точке (динамической и статической, соответственно). В силу принципа независимого действия сил эти перемещения пропорциональны напряжениям без учета собственного веса конструкции. В результате в левой части (29.14) получаем составляющую напряжения при ударе без учета собственного веса конструкции. Но эта составляющая в задачах на ударную нагрузку, как правило, на порядки превосходит напряжения от собственного веса. Таким образом, формула (29.14), как правило, обладает достаточной для практики точностью.

Подчеркнем важность сделанного замечания: если в формуле (29.14) напряжение $\sigma_{\text{ст}}$ брать с учетом собственного веса конструкции, то полученное напряжение при ударе $\sigma_{\text{д}}$ может оказаться недопустимо завышенным.

Подстановкой (29.12) в (29.13) получаем:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{(M + m_T)M}{(M + m_p)^2} \frac{v_1^2}{\Delta z_{\text{ст}} g}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1 + m_T/M}{\left(1 + m_p/M\right)^2} \frac{v_1^2}{\Delta z_{\text{ст}} g}}. \quad (29.15)$$

Иногда в формуле (29.15) удобно перейти от скорости v_1 в момент соударения к высоте падения h массы M на конструкцию путем замены:

$$\frac{v_1^2}{\Delta z_{\text{ст}} g} = \frac{2h}{\Delta z_{\text{ст}}}. \quad (29.16)$$

В случае, когда приведенные массы конструкции намного меньше массы ударяющего тела, выражение (29.15) приобретает простой вид:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_1^2}{\Delta z_{\text{ст}} g}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta z_{\text{ст}}}}. \quad (29.17)$$

При расчетах на ударную нагрузку коэффициенты динамичности определяют по одной из формул (29.15) или (29.17), причем в случае, когда массой конструкции нельзя пренебречь, вторую приведенную массу обычно приравнивают к первой: $m_p = m_T$.

2

Отмеченное выше свойство пропорциональности перемещений точек конструкции означает, что перемещения при динамической нагрузке, так же как перемещения вследствие собственного веса, можно считать результатом действия некоторых статических нагрузок, приложенных в точке удара. Ниже даны примеры расчета приведенных масс на основе этого предположения.

Пример 1. Конструкция представляет собой упругий стержень массой m и длиной l , установленный вертикально на опоре (Рис.29.2). Ударяющее тело падает по осевой линии на верхний торец стержня.

Будем задавать положение произвольного поперечного сечения стержня расстоянием s до опоры (при отсутствии деформации стержня).

Обозначим w_s — перемещение сечения стержня с координатой s по вертикали вниз (w_l — перемещение верхнего торца). Исходное допущение состоит в следующей связи перемещений различных сечений [11: с.556]:

$$w_s = w_l \frac{s}{l}. \quad (29.18)$$

Если напряжения в стержне определяются только нагрузкой на верхний торец, то соотношение (29.18) очевидно. Однако нормальные напря-

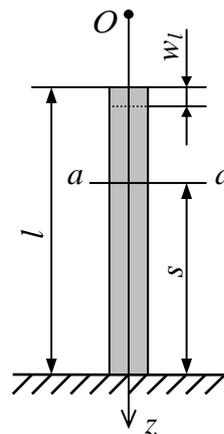


Рис.29.2. Объект удара — вертикальный стержень: $a-a$ — произвольное поперечное сечение; w_l — перемещение верхнего торца стержня вследствие деформирования

жения в стержне определяются также силами тяжести: они зависят от положения сечения, и оказываются тем больше по величине, чем больше вес части стержня над сечением. Тем не менее, ударная нагрузка на верхний торец, как правило, создает напряжения большие по порядку величины, чем напряжения, создаваемые весом стержня. Поэтому, как правило, связь перемещений вида (29.18) оказывается хорошим приближением.

Для массы, приведенной по импульсу, имеем уравнение:

$$m_p \dot{w}_l = \int_0^l \dot{w}_s \frac{m}{l} ds$$

(импульс, определяемый приведенной массой, должен быть равен истинному импульсу). После подстановки (29.18) в правую часть этого уравнения получаем:

$$m_p \dot{w}_l = \frac{m}{l^2} \int_0^l \dot{w}_l s ds = \frac{m}{l^2} \dot{w}_l \frac{s^2}{2} \Big|_0^l = \frac{m}{2} \dot{w}_l.$$

Итак, для приведенной по импульсу массы получаем требование:

$$m_p = \frac{m}{2}. \quad (29.19)$$

Легко проверить, что это требование не противоречиво, то есть что потенциальная энергия стержня в поле тяжести определяется этой же массой:

$$U_{\text{кт}} = -m_p g w_l = -\int_0^l w_s g \frac{m}{l} ds.$$

Для массы конструкции, приведенной по кинетической энергии, имеем уравнение:

$$\frac{m_T \dot{w}_l^2}{2} = \int_0^l \frac{\dot{w}_s^2}{2} \frac{m}{l} ds$$

(кинетическая энергия, определяемая приведенной массой, должна быть равна истинной энергии). После подстановки (29.18) в правую часть этого уравнения получаем:

$$\frac{m_T \dot{w}_l^2}{2} = \frac{m \dot{w}_l^2}{2l^3} \int_0^l s^2 ds = \frac{m \dot{w}_l^2}{2l^3} \frac{s^3}{3} \Big|_0^l = \frac{m \dot{w}_l^2}{6}.$$

Отсюда

$$m_T = \frac{m}{3}. \quad (29.20)$$

Пример 2. Конструкция представляет собой консольную балку массой m и длиной l , расположенную горизонтально (Рис.29.3). Ударяющее тело падает на свободный конец балки и вызывает прямой изгиб.

Прогибы сечений балки будем определять в связанной СК $O's$, у которой ось s совпадает с осевой линией балки до деформации. Прогиб сечения с координатой s обозначим y_s (Рис.29.3). Определим вначале упругую линию в схеме нагружения на рис.29.3, для чего применим метод началь-

ных параметров. Начальные параметры (угол наклона упругой линии и прогиб) в данной задаче равны нулю. В заделке действуют на балку сила реакции $P_1 = -P$ и реактивный момент $M_{c1} = Pl$. Применение формулы (9.12) дает:

$$EJy_s = \frac{Ps^2}{2} \left(l - \frac{s}{3} \right); \quad EJy_l = \frac{Pl^3}{3},$$

откуда

$$y_s = \frac{3y_l}{2l^3} s^2 \left(l - \frac{s}{3} \right). \quad (29.21)$$

Уравнение для второй приведенной массы имеет вид:

$$m_p \dot{y}_l = \int_0^l \dot{y}_s \frac{m}{l} ds,$$

или

$$m_p \dot{y}_l = \frac{3\dot{y}_l m}{2l^4} \int_0^l s^2 \left(l - \frac{s}{3} \right) ds = \frac{3\dot{y}_l m l^4}{2l^4} \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \dot{y}_l m.$$

Здесь сделана подстановка:

$$\int_0^l s^2 \left(l - \frac{s}{3} \right) ds = l \frac{s^3}{3} \Big|_0^l - \frac{s^4}{12} \Big|_0^l = \frac{l^4}{4}.$$

Итак,

$$m_p = \frac{3}{8} m, \quad (29.22)$$

причем легко проверяется выполнение требования (29.4) для потенциальной энергии.

Уравнение для первой приведенной массы имеет вид:

$$\frac{m_T \dot{y}_l^2}{2} = \int_0^l \frac{\dot{y}_s^2}{2} \frac{m}{l} ds,$$

или

$$\frac{m_T \dot{y}_l^2}{2} = \frac{m}{2l} \int_0^l \left(\frac{3\dot{y}_l}{2l^3} s^2 \left(l - \frac{s}{3} \right) \right)^2 ds = \frac{9\dot{y}_l^2 m}{8l^7} \int_0^l s^4 \left(l - \frac{s}{3} \right)^2 ds = \frac{9\dot{y}_l^2 m}{8l^7} \frac{33}{315} l^7 = \frac{33}{280} \dot{y}_l^2 m.$$

Здесь сделана подстановка:

$$\int_0^l s^4 \left(l - \frac{s}{3} \right)^2 ds = \int_0^l \left(s^4 l^2 - \frac{2ls^5}{3} + \frac{s^6}{9} \right) ds = \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 9} \right) l^7 = \frac{33}{315} l^7.$$

Итак,

$$m_T = \frac{33}{140} m. \quad (29.23)$$

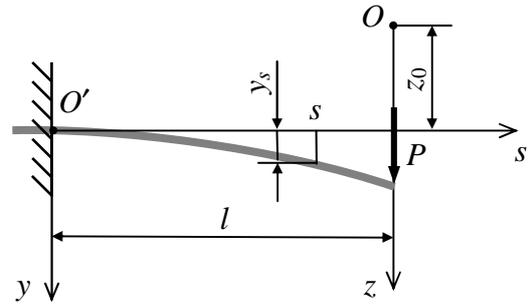


Рис.29.3. Объект удара — консольная балка:

$O'ys$ — связанная с балкой СК;

Oz — ось отсчета обобщенной координаты;

P — ударная нагрузка

Дополнение к лекции

Примеры расчетов на удар

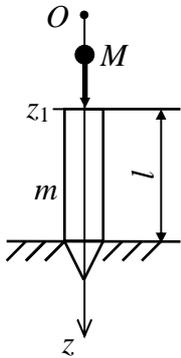


Рис.29Д.1

Задача 1. Определить напряжение в однородной свае при ударе по ней молота свайного копра. Молот падает с высоты h и имеет массу M . Заданы параметры сваи: модуль упругости E , площадь поперечного сечения F , длина l , масса m (Рис.29Д.1).

Определим напряжение в свае $\sigma_{ст}$ и ее просадку $\Delta z_{ст}$ при статической нагрузке и затем применим формулу (29.15) с подстановкой (29.16), чтобы получить искомое напряжение.

Для составляющей напряжения в свае от статического действия груза имеем:

$$\sigma_{ст} = -\frac{Mg}{F}.$$

Просадка, связанная с этим напряжением, получается из закона Гука:

$$\Delta z_{ст} = \frac{l}{E} |\sigma_{ст}| = \frac{l}{E} \frac{Mg}{F}. \quad (29Д.1)$$

Коэффициент динамичности рассчитывается по формуле:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{1 + \frac{m_T}{M}}{\left(1 + \frac{m_p}{M}\right)^2} \frac{2h}{\Delta z_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1 + \frac{m}{3M}}{\left(1 + \frac{m}{2M}\right)^2} \frac{2h}{\Delta z_{ст}}}$$

(здесь учтены результаты (29.19), (29.20)). Искомое напряжение получаем по формуле (29.14).

Задача 2. Определить напряжение сжатия при забивании дюбеля в вертикальную стену ударом бойка газодинамического молотка. Заданы масса бойка M , скорость соударения v_1 , а также характеристики дюбеля l , F , E .

Напряжение зависит от прочности стены. Будем полагать стену непроницаемой и абсолютно жесткой, а деформацию дюбеля упругой. Тогда задача будет аналогична предыдущей, однако движение тел в данном случае горизонтальное, и силы тяжести на движение не влияют. Формула (29.11) по-прежнему применима, если положить $g = 0$. Кроме того, массой дюбеля по сравнению с массой бойка можно пренебречь. В результате получаем:

$$\Delta z_d = \sqrt{\frac{M}{c}} v_1^2.$$

В формуле присутствует коэффициент ударной жесткости дюбеля c , который можно получить, сопоставляя выражения (29.7) и (29Д.1). Имеем:

$$\frac{Mg}{c} = \frac{l}{E} \frac{Mg}{F},$$

следовательно

$$c = \frac{EF}{l}. \quad (29Д.2)$$

Итак,

$$\Delta z_{\text{д}} = \sqrt{\frac{Ml}{EF}} v_1^2,$$

откуда

$$\sigma_{\text{д}} = -E \frac{\Delta z_{\text{д}}}{l} = -\sqrt{\frac{ME}{lF}} v_1.$$

Статической аналогии задача не имеет.

Задача 3. Определить изгибающий момент, возникающий в раме железнодорожной платформы длиной l при опускании на ее середину груза массой M . Платформу рассматривать как балку с шарнирным опиранием концов.

Коэффициент динамичности в данном случае определяем из выражения (29.15), в котором полагаем $v_1 = 0$. Таким образом, $k_{\text{д}} = 2$. В статической задаче изгибающий момент максимален в сечении, над которым находится груз, и равен $M_{\text{ст}} = Mg \frac{l}{4}$ (см. рис.25Д.1). Искомый изгибающий момент вдвое больше этого.

Задача 4. При опускании кабины подъемника произошла внезапная остановка лебедки. Заданы характеристики каната l, E, F , скорость v_1 опускания и масса M кабины. Определить максимальное натяжение каната N_{max} , пренебрегая его весом [3: с.460].

Рассмотренная модель удара применима к данной задаче, но взаимодействие конструкции (каната) и источника ударной нагрузки (кабины) имеет особенности. На рис.29Д.2 указаны значение обобщенной координаты z_0 при отсутствии внешних нагрузок, значение этой координаты z_1 при статическом действии нагрузки и максимальное значение координаты при ударе z_2 . Обозначим

$$f_{\text{д}} = z_2 - z_0, \quad f_{\text{ст}} = z_1 - z_0$$

— соответственно перемещения конструкции при ударной и статической нагрузках. Очевидно, что

$$f_{\text{ст}} = \frac{Mg}{c}. \quad (29Д.3)$$

Особенность взаимодействия тел в данном случае состоит в том, что уже в начальный момент приложения ударной нагрузки (когда $\dot{z} = v_1$) канат находится под статической нагрузкой $P = Mg$. Закон сохранения энергии в данном случае имеет вид:

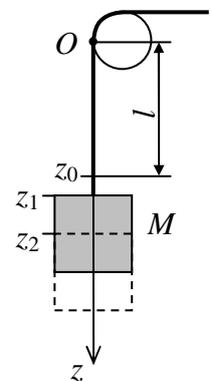


Рис.29Д.2

$$U_2 - U_1 = \frac{Mv_1^2}{2}, \quad (29Д.4)$$

где U_1 — потенциальная энергия в начальный момент удара; U_2 — потенциальная энергия в момент остановки кабины. Это дает:

$$\frac{c}{2} f_d^2 - \frac{c}{2} f_{ст}^2 - Mg(z_2 - z_1) = \frac{Mv_1^2}{2},$$

где c — ударная жесткость каната.

После замены $z_2 - z_1 = f_d - f_{ст}$ с учетом (29Д.3) это уравнение приводится к виду

$$f_d^2 + f_{ст}^2 - 2f_{ст}f_d - \frac{Mv_1^2}{c} = 0,$$

откуда

$$f_d = f_{ст} + \sqrt{\frac{Mv_1^2}{c}}.$$

Натяжение каната получим из последней формулы подстановками (29Д.2), (29Д.3):

$$N_{\max} = cf_d = Mg + \sqrt{\frac{MEF}{l}}v_1.$$